

Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение  
Лицей ИГУ города Иркутска  
Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение города Иркутска  
средняя общеобразовательная школа №77

Утверждаю

  
Е.Ю. Кузьмина  
директор МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска  
приказ № 01-06-015/13 от 31 августа 2019 г

Утверждаю

  
Т.Г. Рябоволова  
директор МБОУ г.Иркутска СОШ №77

Приказ № 06-10-122/19 от 30 августа 2019 г

### Рабочая программа курса

## РАЗВИТИЕ КОМБИНАТОРНО-ЛОГИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ

для 5-6 классов

срок реализации программы: 2 года

Составитель:  
Кузьмин О.В.,  
учитель математики, высшая кв.категория  
Кузьмина В.В.,  
учитель математики, первая кв.категория  
МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска

г. Иркутск  
2019г.

## Пояснительная записка

Программа составлена на основе Федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования (ФГОС ООО).

Место предмета в учебном плане: часть, формируемая участниками образовательных отношений.

Предметная область: математика и информатика.

Основные задачи реализации содержания: обеспечение осознания значения математики в повседневной жизни человека; обеспечение понимания роли математических процессов в современном мире, формирования представлений о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления.

В результате изучения предметной области «Математика и информатика» обучающиеся развивают логическое и математическое мышление, получают представление о математических моделях; овладевают математическими рассуждениями; учатся применять математические знания при решении различных задач и оценивать полученные результаты; овладевают умениями решения учебных задач; развивают математическую интуицию; получают представление о применении математических знаний в реальных ситуациях.

Количество учебных часов, на которые рассчитана программа:

	5 класс	6 класс	Всего
Количество учебных недель	34	34	68
Количество часов в неделю	1 ч/нед	1 ч/нед	
Количество часов в год	34	34	68

## Планируемые результаты освоения курса

### 5 класс

#### *Личностные результаты:*

1) ответственное отношение к учению, готовность и способность учащихся к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию;

2) способность к эмоциональному восприятию математических объектов, задач, решений, рассуждений;

3) умение ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи, понимать смысл поставленной задачи, выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры;

4) первоначальное представление о математической науке как сфере человеческой деятельности, об этапах её развития, о её значимости для развития цивилизации;

5) критичность мышления, умение распознавать логически некорректные высказывания, отличать гипотезу от факта;

6) креативность мышления, инициатива, находчивость, активность при решении различных комбинаторных и логических задач;

#### *Метапредметные результаты:*

1) способность самостоятельно планировать альтернативные пути достижения целей, осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения учебных и познавательных задач;

2) способность определять последовательность промежуточных целей и соответствующих им действий с учетом конечного результата;

3) умение осуществлять контроль по образцу и вносить необходимые коррективы;

- 4) способность адекватно оценивать правильность или ошибочность выполнения учебной задачи, её объективную трудность и собственные возможности её решения;
- 5) умение устанавливать причинно-следственные связи; строить логические рассуждения, умозаключения (индуктивные, дедуктивные и по аналогии) и выводы;
- 6) умение создавать, применять и преобразовывать знаково-символические средства, модели и схемы для решения учебных и познавательных задач;
- 7) развитие способности организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителем и сверстниками: определять цели, распределять функции и роли участников, взаимодействовать и находить общие способы работы; умения работать в группе: находить общее решение и разрешать конфликты на основе согласования позиций и учёта интересов; слушать партнёра; формулировать, аргументировать и отстаивать своё мнение;
- 8) способность прогнозировать возникновение конфликтов при наличии различных точек зрения;
- 9) формирования учебной и общепользовательской компетентности в области использования информационно-коммуникационных технологий (ИКТ - компетентности);
- 10) первоначальное представление об идеях и о методах математики как об универсальном языке науки и техники;
- 11) развитие способности видеть математическую задачу в других дисциплинах, в окружающей жизни;
- 12) умение находить в различных источниках информацию, необходимую для решения математических проблем, и представлять её в понятной форме; принимать решение в условиях неполной и избыточной, точной и вероятностной информации;
- 13) умение понимать и использовать математические средства наглядности (рисунки, чертежи, схемы и др.) для иллюстрации, интерпретации, аргументации;
- 14) умение выдвигать гипотезы при решении учебных задач и понимания необходимости их проверки;
- 15) умение самостоятельно ставить цели, выбирать и создавать алгоритмы для решения учебных математических проблем;
- 16) способность планировать и осуществлять деятельность, направленную на решение задач исследовательского характера;

***Предметные результаты:***

**Учащийся научится:**

- работать с математическим текстом (структурирование, извлечение необходимой информации), точно и грамотно выражать свои мысли в устной и письменной речи, применяя математическую терминологию и символику, использовать различные языки математики (словесный, символический, графический), развития способности обосновывать суждения, проводить классификацию;
- записывать условие задачи в виде таблицы или с помощью схемы, составить алгоритм решения задачи;
- решать простейшие логические задачи различными методами (методом кругов Эйлера, включения и исключения, табличным методом, с помощью графов);
- понятийному аппарату азбуки рассуждений;
- выдвигать, опровергать или доказывать простейшие гипотезы;
- различным способам проведения правильных логических рассуждений;
- понимать различие между примером и доказательством;
- отличать главное от второстепенного, доказанное от недоказанного,
- понятийному аппарату перечислительной комбинаторики (конфигурации, выборки, перестановки, размещения и т.д.);

- использовать основные комбинаторные правила (правила суммы и произведения) при решении простейших комбинаторных задач;
- пользоваться простейшими формулами подсчета числа комбинаторных конфигураций (формулы включения-исключения, подсчета числа перестановок, числа размещений, числа сочетаний по 2, числа подмножеств данного множества).

**Учащийся сможет научиться:**

- выполнять арифметические преобразования рациональных выражений, применять их для решения математических задач и задач, возникающих в смежных учебных предметах;
- применять полученные знания в нестандартных ситуациях, при решении олимпиадных задач и задач повышенной сложности;
- использовать основные логические приемы при проведении рассуждений в различных предметных областях.

**6 класс**

***Личностные результаты:***

- 1) коммуникативная компетентность в общении и сотрудничестве со сверстниками, старшими и младшими в образовательной, учебно-исследовательской, творческой и других видах деятельности;
- 2) умение контролировать процесс и результат учебной математической деятельности;
- 3) умение ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи, понимать смысл поставленной задачи, выстраивать аргументацию, приводить примеры и контрпримеры;
- 4) критичность мышления, умение распознавать логически некорректные высказывания, отличать гипотезу от факта;
- 5) креативность мышления, инициативы, находчивости, активности при решении различных комбинаторных и логических задач;

***Метапредметные результаты:***

- 1) способность определять последовательность промежуточных целей и соответствующих им действий с учетом конечного результата;
- 2) умение устанавливать причинно-следственные связи; строить логические рассуждения, умозаключения (индуктивные, дедуктивные и по аналогии) и выводы;
- 3) умение создавать, применять и преобразовывать знаково-символические средства, модели и схемы для решения учебных и познавательных задач;
- 4) способность прогнозировать возникновение конфликтов при наличии различных точек зрения;
- 5) формирования учебной и общепользовательской компетентности в области использования информационно-коммуникационных технологий (ИКТ - компетентности);
- 8) первоначальное представление об идеях и о методах математики как об универсальном языке науки и техники;
- 9) умение понимать и использовать математические средства наглядности (рисунки, чертежи, схемы и др.) для иллюстрации, интерпретации, аргументации;
- 10) умение выдвигать гипотезы при решении учебных задач и понимания необходимости их проверки;
- 11) понимание сущности алгоритмических предписаний и умения действовать в соответствии с предложенным алгоритмом;
- 12) умение самостоятельно ставить цели, выбирать и создавать алгоритмы для решения учебных математических проблем;
- 13) способность планировать и осуществлять деятельность, направленную на решение задач исследовательского характера;

### ***Предметные результаты:***

#### **Учащийся научится:**

- работать с математическим текстом (структурирование необходимой информации), точно и грамотно выражать свои мысли в устной и письменной речи, применяя математическую терминологию и символику, использовать различные языки математики (словесный, символический, графический), развития способности обосновывать суждения, проводить классификацию;
- пользоваться простейшими формулами подсчета числа комбинаторных конфигураций;
- находить закономерности;
- решать простейшие задачи на перебор;
- решать задачи на расположение элементов по окружности;
- решать задачи на упорядочение простейших комбинаторных конфигураций;
- пользоваться простейшими формулами подсчета числа комбинаторных конфигураций;
- находить сходства и различия между комбинаторными задачами;
- решать простейшие комбинаторно-логические задачи различными способами;
- применять основные логические приемы при проведении рассуждений;
- анализировать условия, находить стратегии для простейших математических игр
- применять выигрышную позицию в игровых задачах;
- применять стратегию дополнения;

#### **Учащийся сможет научиться:**

- выполнять арифметические преобразования рациональных выражений, применять их для решения математических задач и задач, возникающих в смежных учебных предметах;
- применять полученные знания в нестандартных ситуациях, при решении олимпиадных задач и задач повышенной сложности;
- использовать основные логические приемы при проведении рассуждений в различных предметных областях.

## **Содержание курса**

### **5 класс**

#### **1. Занимательные и провоцирующие задачи (3 часа)**

Знакомство со спецификой комбинаторных и логических задач. Упорядочение. Нахождение закономерностей.

#### **2. Основные комбинаторные правила (5 часа)**

Понятие о перечислительных комбинаторных задачах. Правила суммы и произведения, как основные принципы решения перечислительных комбинаторных задач.

#### **3. Перечисление комбинаторных конфигураций (8 часов)**

Понятие о комбинаторных конфигурациях. Знакомство с простейшими типами перечислительных комбинаторных задач (подсчет числа перестановок, размещений, сочетаний по два, числа подмножеств данного множества).

#### **4. Логические методы в комбинаторике (5 часов)**

Классические задачи на метод включения и исключения. Знакомство с простейшими (прямыми и обратными) комбинаторно-логическими задачами и методами их решения. Понятие графа. Метод точечных графов. Круги Эйлера.

## 5. Элементы логики (12 часов)

Выражения, предикаты, высказывания и их преобразования. Алгебра высказываний. Истина, ложь. Понятия: следует; не следует; если; то; и; или. Решение задач о переправах и разъездах, на переливание, взвешивание и отыскание фальшивой монеты. Табличный метод решения логических задач. Решение задач с помощью графов. Решение задач с помощью кругов Эйлера. Знакомство с софизмами.

**Итоговый контроль. Защита творческой зачетной работы (1 час)**

## 6 класс

### 1. Перечисление комбинаторных конфигураций (4 часа)

Сходства и различия между комбинаторными задачами. Роль повторяемости и различимости элементов в конфигурациях. Важнейшие комбинаторные числа.

### 2. Комбинаторные методы в логике (6 часов)

Логические задачи на метод включений и исключений. Решение логических задач с помощью кругов Эйлера.

Взаимно однозначное соответствие. Табличный метод решения логических задач. Решение логических задач методом графов.

### 3. Метод перебора (3 часа)

Понятие об организованном переборе. Решение простейших задач на перебор возможных вариантов.

### 4. Задачи на упорядочение (7 часов)

Понятие порядка и строгого порядка. Задачи на линейное упорядочение множества. Циклический порядок. Задачи на расположение элементов по окружности. Упорядоченные пары и тройки. Решение задач на упорядочение простейших комбинаторных конфигураций.

### 5. Элементы логики (4 часа)

Высказывания и логические выводы. Истинные и ложные утверждения. Задачи о правдолюбцах и лжецах.

### 6. Игровые задачи (9 часов)

Турнирные задачи. Соревнования двух участников. Математические игры для двух лиц. Выигрышная позиция. Симметрия. Разбиение на пары и стратегия дополнения. Передача хода. Анализ с конца.

**Итоговый контроль. Защита творческой зачетной работы (1 час)**

## ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

### 5 класс

Номер урока	Наименование разделов и тем уроков	Кол-во часов	Контроль
	<b>1. Занимательные и провоцирующие задачи</b>	<b>3</b>	
1	Веселая разминка	1	
2	Упорядочение	1	
3	Нахождение закономерностей	1	
	<b>2. Основные комбинаторные правила</b>	<b>5</b>	
4	Перечислительные комбинаторные задачи	1	

5	Правила суммы и произведения	1	
6	Решения задач на правило суммы	1	
7	Решения задач на правило произведения	1	
8	Контрольная работа за 1 четверть		1
	<b>3. Перечисление комбинаторных конфигураций</b>	<b>8</b>	
9	Комбинаторные конфигурации	1	
10	Множество и выборка	1	
11	Факториал. Подсчет числа перестановок	1	
12	Подсчет числа размещений	1	
13	Подсчет числа сочетаний по два	1	
14	Подсчет числа подмножеств данного множества	1	
15	Контрольная работа за 2 четверть		1
<b>16</b>	Решение задач на перечисление комбинаторных конфигураций	1	
	<b>4. Логические методы в комбинаторике</b>	<b>5</b>	
17	Классические задачи на метод включения и исключения	1	
18	Методы решения простейших комбинаторно-логических задач	1	
19	Понятие графа. Метод точечных графов	1	
20	Круги Эйлера	1	
21	Контрольный урок		1
	<b>5. Элементы логики</b>	<b>12</b>	
22	Выражения и предикаты	1	
23	Высказывания и их преобразования	1	
24	Азбука рассуждений, истина, ложь. Понятия: следует; не следует; если; то; и; или	1	
25	Контрольная работа за 3 четверть		1
<b>26</b>	Задачи о переправах и разъездах	1	
27	Решение задач на взвешивание	1	
28	Решение задач на переливание	1	
29	Табличный метод решения логических задач	1	
30	Решение задач с помощью графов	1	
31	Решение задач с помощью кругов Эйлера	1	
32	Знакомство с софизмами	1	
33	Итоговая контрольная работа		1
34	Защита творческой зачетной работы		1
	Итого часов:	<b>28</b>	<b>6</b>

### 6 класс

Номер урока	Наименование разделов и тем уроков	Кол-во часов	Контроль
	<b>1. Перечисление комбинаторных конфигураций</b>	<b>4</b>	
1	Сходства и различия между комбинаторными задачами.	1	
2	Упорядочение	1	

3	Нахождение закономерностей	1	
4	Контрольный урок		1
	<b>2. Комбинаторные методы в логике</b>	<b>6</b>	
5	Логические задачи на метод включений и исключений	1	
6	Решение логических задач с помощью кругов Эйлера	1	
7	Взаимно однозначное соответствие	1	
8	Контрольная работа за 1 четверть		1
9	Табличный метод решения логических задач. Решение логических задач методом графов	1	
10	Контрольный урок		1
	<b>3. Метод перебора</b>	<b>3</b>	
11	Понятие об организованном переборе	1	
12	Решение простейших задач на перебор с помощью чётности	1	
13	Контрольный урок		1
	<b>4. Задачи на упорядочение</b>	<b>7</b>	
14	Понятие порядка и строгого порядка. Задачи на линейное упорядочение множества	1	
15	Контрольная работа за 2 четверть		1
16	Циклический порядок	1	
17	Задачи на расположение элементов по окружности	1	
18	Упорядоченные пары и тройки	1	
19	Решение задач на упорядочение простейших комбинаторных конфигураций	1	
20	Контрольный урок		1
	<b>5. Элементы логики</b>	<b>4</b>	
21	Высказывания и логические выводы	1	
22	Истинные и ложные утверждения	1	
23	Задачи о правдолюбцах и лжецах	1	
24	Контрольная работа за 3 четверть		1
	<b>6. Игровые задачи</b>	<b>9</b>	
25	Турнирные задачи	1	
26	Соревнования двух участников	1	
27	Математические игры для двух лиц	1	
28	Выигрышная позиция	1	
29	Симметрия	1	
30	Разбиение на пары и стратегия дополнения	1	
31	Передача хода	1	
32	Анализ с конца	1	
33	Итоговая контрольная работа		1
34	Защита творческой зачетной работы		1
	<b>Итого часов:</b>	<b>25</b>	<b>9</b>

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

### ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Примерные задания зачетной работы для 5-го класса

1. Есть два кувшина емкостью 3 и 5 литров. Как с помощью только этих кувшинов набрать из реки ровно 1 литр воды?
2. Сколькими способами можно рассадить в ряд на стулья трех учеников? Выписать все возможные случаи.
3. Коля произнес истинное утверждение. Миша повторил его дословно, и оно стало ложным. Что сказал Коля? Укажите хотя бы одно такое утверждение.
4. Среди 4 монет одна фальшивая (тяжелее настоящей). За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь фальшивую монету можно наверняка отделить от настоящих?

Примерные задания зачетной работы для 6-го класса

1. В коробке лежит 5 карандашей: 2 синих и 3 красных. Сколько карандашей надо взять из коробки, не заглядывая в нее, чтобы среди них был хотя бы 1 красный карандаш?
2. Три брата имеют специальности: архитектор, бетонщик, водитель. Из трех утверждений: «Алексей – архитектор», «Борис – не архитектор», «Владимир – не водитель» только одно верное. Является ли Владимир архитектором?
3. В соревнованиях по бегу Юра, Гриша и Толя заняли три первых места. Какое место занял каждый ребенок, если Гриша занял не второе и не третье место, а Толя – не третье?
4. На столе лежат две кучки шаров, по 30 шаров в каждой кучке. Два игрока по очереди берут со стола любое число шаров, но при одном ходе из какой-либо одной кучки. Выигравшим считается тот, кто берет со стола последние шары. Кто и как выигрывает при правильной игре?

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

#### *Перечислительные комбинаторные задачи*

Комбинаторика как наука сложилась в XVII-XVIII вв. долгое время считалось, что она находится в стороне от главного русла развития математики и применяется в основном при расшифровке древних письменностей и кодировании. Позднее положение существенно изменилось, особенно в последние десятилетия в связи с появлением быстродействующих компьютеров. Комбинаторика превратилась в важный раздел математики, который используется в биологии, химии, физике, экономике, вычислительной математике и др. в связи с этим в ней возникли и многие другие методы.

Что изучает комбинаторика? Комбинации и перестановки предметов, расположения элементов, обладающие заданными свойствами, подмножества конечных множеств и способы их упорядочивания и т. д. отсюда видно, что она тесно связана с теорией множеств.

Обычный вопрос в перечислительных комбинаторных задачах: сколькими способами можно сделать то-то?

**Пример 1.** Сколько можно составить пятизначных натуральных чисел с помощью цифр 1 и 0, если в запись каждого числа цифра 1 входит ровно три раза?

**Решение.** Будем искать указанные числа перебором, причем так, чтобы не потерять ни одного числа. Проще начать с нахождения мест для двух нулей, так как если места для нулей определены, то три оставшихся места заполняются единицами однозначно.

Зафиксируем один из нулей на втором месте; тогда другой нуль можно записать на третьем, четвертом или пятом местах. Если теперь один нуль фиксировать на третьем месте, то второй нуль можно записать на четвертом или пятом местах (вариант, когда нули стоят на третьем и втором местах, уже встречался). Наконец, если один из нулей зафиксировать на четвертом месте, то для другого нуля остается только пятое место. Получаем 6 чисел таких:

10011, 10101, 10110, 11001, 11010, 11100. *Ответ:* 6.

**Пример 2.** Сколько существует двузначных натуральных чисел, у которых первая цифра больше второй?

**Решение.** Если первая цифра двузначного числа равна 1, то такое число только одно – 10. Если первая цифра числа равна 2, то таких чисел два – 20 и 21. Если первая цифра равна 3, то таких чисел уже три – 30, 31 и 32. И т. д. Наконец, если первая цифра равна 9, то таких двузначных чисел девять – от 90 до 98.

Следовательно, всего чисел  $1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$ . *Ответ:* 45.

**Домашнее задание.**

1. Имеется 8 шаров: 4 синих, 3 красных, 1 белый и два ящика, один из которых вмещает не более 3 шаров, другой – не более 5. Сколькими способами можно разместить все эти 8 шаров в двух ящиках?
2. Сколько существует двузначных натуральных чисел, у которых первая цифра меньше второй?
3. Сколько существует девятизначных натуральных чисел, у каждого из которых цифры расположены в порядке убывания?
4. Сколько различных произведений, кратных 10, можно составить из множителей 2, 3, 5, 7, 11, если каждый множитель можно использовать в каждом из произведений не более одного раза?
5. Сколько существует натуральных чисел, меньших 100, которые:
  - а) делятся на 2 и на 3;
  - б) делятся на 2, но не делятся на 3;
  - в) делятся на 3, но не делятся на 2;
  - г) делятся на 2 или на 3;
  - д) не делятся ни на 2, ни на 3?

**Методическое замечание.** Рекомендуется решение одного из пунктов последнего задания показать учителю, одно – решить всем вместе на доске, остальные – самостоятельно.

**Метод перебора**

*Метод перебора* применяется в задачах, при решении которых приходится перебирать различные варианты. Перебор должен быть грамотным, т. е. таким,



$$\begin{array}{r}
 + \\
 \hline
 \phantom{000} * \phantom{00} * \\
 \phantom{00} * \phantom{0} * \phantom{0} * \phantom{0} 1
 \end{array}$$

**Решение.** Сначала восстановим часть умножения, получающуюся при умножении первого множителя на вторую цифру второго множителя:

$$1 * \times * = **1.$$

Рассмотрим все возможности:

$$11 \times 1 = 11, \quad 17 \times 3 = 51, \quad 13 \times 7 = 91, \quad 19 \times 9 = 171.$$

Подходит только последняя. Теперь запись принимает такой вид:

$$\begin{array}{r}
 \phantom{000} 1 \phantom{00} 9 \\
 \phantom{00} * \phantom{0} 9 \\
 \hline
 \phantom{000} 1 \phantom{00} 7 \phantom{0} 1 \\
 + \\
 \phantom{000} * \phantom{00} * \phantom{0} * \phantom{0} 1
 \end{array}$$

Как видно из сложения, первая цифра второго слагаемого равна 8 или 9. Тогда первая цифра второго множителя может быть равна только 5, поскольку произведение  $19 \times 4 = 76$  слишком мало, а произведение  $19 \times 6 = 114$  слишком велико для этого. *Ответ:*  $19 \times 59 = 1121$ .

**Пример 3.** Восстановите запись:

$$\begin{array}{r}
 \text{К} \phantom{00} \text{Р} \phantom{00} \text{О} \phantom{00} \text{С} \phantom{00} \text{С} \\
 + \\
 \text{К} \phantom{00} \text{Р} \phantom{00} \text{О} \phantom{00} \text{С} \phantom{00} \text{С} \\
 \hline
 \text{С} \phantom{00} \text{П} \phantom{00} \text{О} \phantom{00} \text{Р} \phantom{00} \text{Т}
 \end{array}$$

где каждая буква означает цифру, причем одинаковые буквы означают одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры. Найдите все решения.

**Решение.** Обратим внимание на два последних столбца. Так как в них при сложении одних и тех же цифр С и С получаются разные цифры, то в пятом столбце должно получиться в сумме не менее десяти, откуда С не меньше пяти. Присмотримся к третьему столбцу: когда сумма  $О + О$  может оканчиваться той же самой цифрой О? Такое возможно лишь тогда, когда О равно нулю или девяти. Но цифра О равной нулю быть не может, поскольку из четвертого столбца в третий переносится единица; значит, О равно девяти.

Вернемся к цифре С. Учитывая предыдущее, видим, что С не меньше пяти и не больше восьми. Осталось перебрать все эти возможные значения С (проделайте это самостоятельно). *Ответ:*  $35\ 977 + 35\ 977 = 71\ 954$ .

**Методическое замечание.** Рекомендуется решение при одном значении С показать учителю, остальные – самостоятельно.

**Домашнее задание.**

1. Восстановите запись:  $*8 \times * = 8**$ . Укажите все решения.

2. Восстановите запись:

**ТЭТА + БЭТА = СУММА,**

где одинаковые буквы означают одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры. Найдите все решения.

3. В квартире 13 человек, кошек и мух. У них вместе 42 ноги, причем у каждой мухи 6 ног. Сколько было в отдельности людей, кошек и мух? Укажите все ответы.

**Задачи на взвешивание на чашечных весах**

**Пример 1.** Среди 18 монет одна фальшивая. Настоящие монеты весят одинаково, фальшивая монета отличается по массе от настоящих монет. За какое наименьшее число взвешиваний на правильных чашечных весах без гирь можно определить, легче или тяжелее фальшивая монета, чем настоящая? (Находить фальшивую монету не нужно.)

**Решение.** Занумеруем монеты. Разобьем множество монет на три кучки, по 6 монет в каждой.

При первом взвешивании положим на одну чашку весов все монеты первой кучки, на другую – второй. Возможны два случая.

1) Пусть при этом взвешивании весы оказались в равновесии. Тогда фальшивая монета находится в третьей кучке.

Теперь положим на одну чашку весов первую кучку монет, на другую – третью. Если, например третья кучка перетянет, то фальшивая монета тяжелее настоящей.

2) Пусть при первом взвешивании весы были в неравновесии. Тогда фальшивая монета находится или в первой, или во второй кучке. Следовательно, все монеты третьей кучки – настоящие.

Положим на одну чашку весов первую кучку монет, на другую – третью. Если весы оказались в неравновесии, то фальшивая монета находится в первой кучке, и последнее взвешивание покажет, легче она или тяжелее, чем настоящая. Если же весы оказались в равновесии, то фальшивая монета – во второй кучке, и по первому взвешиванию также можно определить, легче она или тяжелее настоящей.

*Ответ:* за два.

**Пример 2.** Как взвесить груз на чашечных весах с гирями, если гири правильные, а весы неправильные?

**Решение.** Уравновесим груз гирями. Затем груз уберем, оставив гири на другой чашке весов, и заменим его таким новым набором гирь, чтобы весы снова оказались в равновесии. Груз весит столько, сколько весит этот набор.

**Домашнее задание.**

1. Среди а) 25; б) 14 деталей одна бракованная, остальные – стандартные. Все стандартные детали весят одинаково, а бракованная деталь отличается по массе от стандартных деталей. За какое наименьшее число взвешиваний на правильных

чашечных весах без гирь можно установить, легче или тяжелее бракованная деталь, чем стандартная?

2. Как на неправильных чашечных весах с правильными гирями отвесить 1 кг крупы?

### **Задачи на расположение элементов по окружности**

Займемся задачами на расположение элементов по окружности.

**Пример 1.** На улице, став в кружок, разговаривают четыре девочки: Аня, Валя, Галя и Нина. Девочка в зеленом платье (не Аня и не Валя) стоит между девочкой в голубом платье и Ниной. Девочка в белом платье стоит между девочкой в розовом платье и Валей. Какое платье на каждой из девочек?

**Методическое замечание.** Рекомендуется сделать чертеж или эскиз.

**Решение.** Обозначим точками девочек в зеленом и голубом платьях, а также Нину. Так как девочка в зеленом платье – не Аня, не Валя и не Нина, то ее зовут Галей. Девочка в белом платье не может быть Ниной; кроме того, она не может быть ни Валей, ни Галей. Следовательно, она Аня.

Остальное теперь легко восстанавливается. *Ответ:* Аня – в белом платье. Валя – в голубом, Галя – в зеленом, Нина – в розовом.

**Пример 2.** Однажды я решил проехаться на кресельной канатной дороге. В некоторый момент я обратил внимание, что идущее мне навстречу кресло имеет номер 95, а следующее за ним – номер 0, дальше 1, 2 и т. д. Я взглянул на номер своего кресла; он оказался равным 66. а) Проехал ли я половину пути? б) Если нет, то при встрече с каким креслом я проеду половину пути?

**Решение.** Всего кресел 96, а половина пути составляет 48 кресел. Я окажусь посередине канатной дороги в тот момент, когда количество кресел впереди и сзади меня окажется одинаковым. Для этого нужно, чтобы номер встречного кресла был равен  $66 - 48 = 18$ . Поскольку встреча с креслом номер 18 у меня впереди, я не проехал половину пути. *Ответ:* а) не проехал; б) 18.

### **Домашнее задание**

1. За круглым столом сидели четыре студента. Филолог сидел против Козина, рядом с историком. Математик сидел рядом с Волковым. Соседи Шатрова – Егоркин и физик. Какая профессия у Козина?

2. Ниф, Наф и Нуф подружились с Серым Волком. Все четверо стали заядлыми филателистами. Волк собирает фауну, один из поросят – флору, другой – спорт, третий – космос. Вся четверка собралась за столом в доме Волка. Волк сидит слева от Нафа, Ниф – справа от собирателя космоса, Нуф сидит напротив Нафа и не интересуется спортивной тематикой. Какие марки собирает Ниф?

3. Девочка выложила по окружности 20 камешков – 10 серых и 10 белых и, двигаясь по окружности в одном направлении, брала каждый седьмой камешек. Через некоторое время все серые камешки были взяты, а все белые остались. В каком порядке были выложены серые и белые камешки?

4. 100 ребят стоят по кругу. Они выбирают водящего следующим образом: первый остается в круге, второй выходит из круга, третий остается, четвертый выходит и т. д. Круг все время сужается, пока в нем не останется один человек. На каком месте он стоял в первоначальном круге?

5. Числа от 1 до 1000 выписаны по порядку по окружности. Начиная с первого, вычеркивается каждое пятнадцатое число (т. е. числа 1, 16, 31 и т. д.), причем при

повторных оборотах числа снова считаются. Сколько останется незачеркнутых чисел?

### **Формула включений и исключений**

Познакомимся с задачами, при решении которых используются круги Эйлера.

**Пример 1.** В одном бурятском улусе каждый житель говорит или по-бурятски, или по-русски, или на обоих языках. 912 жителей села говорят по-бурятски, 653 — по-русски, причем 435 человек говорят на обоих языках. Сколько жителей в этом улусе?

**Решение.** Применим круги Эйлера. Через  $A$  обозначим множество жителей улуса, которые говорят по-бурятски, через  $B$  — множество жителей, которые говорят по-русски.

Будем обозначать число элементов любого конечного множества  $A$  через  $n(A)$ .

Тогда по условию

$$n(A)=912, n(B)=653, n(A \cap B)=435.$$

Нам нужно найти число элементов в объединении множеств  $A$  и  $B$ .

Прежде всего сложим числа  $n(A)$  и  $n(B)$ . Но при этом элементы, входящие в пересечение множеств  $A$  и  $B$ , считаются дважды. Следовательно, из этой суммы нужно вычесть  $n(A \cap B)$ . Получаем:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B). \quad (1)$$

Подставим в формулу (1) значения  $n(A)$ ,  $n(B)$  и  $n(A \cap B)$ :

$$n(A \cup B) = 912 + 653 - 435 = 1130.$$

**Ответ:** 1130.

**Методическое замечание.** Заострить внимание учащихся на том, что формула (1) справедлива не только при условиях данного примера, но и для любых двух конечных множеств  $A$  и  $B$ .

**Пример 2.** Большая группа туристов выехала в заграничное путешествие. Из них владеют английским языком 28 человек, французским — 13, немецким — 10, английским и французским — 8, английским и немецким — 6, французским и немецким — 5, всеми тремя языками — 2, а 41 человек не владеет ни одним из этих трех языков. Сколько туристов в группе?

**Решение.** Обозначим множество туристов группы, которые владеют английским, французским или немецким языком, соответственно через  $A$ ,  $B$  и  $C$ . По условию  $n(A) = 28$ ,  $n(B) = 13$ ,  $n(C) = 10$ ,  $n(A \cap B) = 8$ ,  $n(A \cap C) = 6$ ,  $n(B \cap C) = 5$ ,  $n(A \cap B \cap C) = 2$ .

Сначала найдем число туристов, которые владеют, по меньшей мере, одним из трех иностранных языков, т. е.  $n(A \cup B \cup C)$ . Для этого применим круги Эйлера.

Подсчитаем сумму  $n(A) + n(B) + n(C)$ . Так как в нее каждое из чисел  $n(A \cap B)$ ,  $n(A \cap C)$  и  $n(B \cap C)$  вошло слагаемым два раза, то от этой суммы нужно отнять сумму  $n(A \cap B) + n(A \cap C) + n(B \cap C)$ .

Теперь выясним, сколько раз в полученное выражение

$$n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)$$

входит слагаемым число  $n(A \cap B \cap C)$ . Оно входит в эту сумму три раза со знаком плюс (в каждое из слагаемых  $n(A)$ ,  $n(B)$  и  $n(C)$  и три раза со знаком минус (в каждое из слагаемых  $n(A \cap B)$ ,  $n(A \cap C)$  и  $n(B \cap C)$ ). Следовательно, для того чтобы не

потерять тех туристов, которые входят во множество  $A \vee B \vee C$ , нужно еще прибавить число  $n(A \wedge B \wedge C)$ . Получаем:

$$n(A \vee B \vee C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \wedge B) - n(A \wedge C) - n(B \wedge C) + n(A \wedge B \wedge C). \quad (2)$$

Тогда будем иметь:

$$n(A \vee B \vee C) = 28 + 13 + 10 - 8 - 6 - 5 + 2 = 34.$$

Таким образом, общее число туристов группы равно  $34 + 41 = 75$ . *Ответ: 75.*

**Замечание.** Заострить внимание учащихся на том, что формула (2) справедлива для любых трех конечных множеств  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

#### **Домашнее задание.**

1. Множество  $A$  имеет 100 элементов, являющихся натуральными числами, каждое из которых делится или на 2, или на 3, причем 70 элементов из  $A$  делятся на 2 и 48 – на 3. Сколько элементов множества  $A$  делятся на 6?

2. В течение некоторого времени число дождливых дней было равно 10, ветреных – 8, холодных – 6, дождливых и ветреных – 5, дождливых и холодных – 4, ветреных и холодных – 3 и, наконец, дождливых, ветреных и холодных – 1. Сколько было всего дней с плохой погодой?

3. Контрольная работа по математике в пятом классе состояла из задачи, уравнения и числового примера. Работу писали 36 учеников. Правильно решили только задачу 2 человека, только уравнение – 4, только пример – 7. Не решили только задачу 8 человек, только уравнение – 5, только пример – 3. Остальные ученики выполнили всю работу правильно. Сколько таких учеников?

4. Пол комнаты площадью  $18 \text{ м}^2$  покрыт тремя коврами. Площадь одного ковра –  $6 \text{ м}^2$ , другого –  $5 \text{ м}^2$  и третьего –  $4 \text{ м}^2$ . Каждые два ковра перекрываются на площади  $1 \text{ м}^2$ , причем все три ковра перекрываются на площади  $0,5 \text{ м}^2$ . Какова площадь части пола, не покрытой коврами?